Interpolation et polynômes factoriels

Notations

n est un entier naturel fixé, $n \geq 2$.

$\mathcal{F}$ est l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$.

E est le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels.

E_n est le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Partie I

Si $f \in \mathcal{F}$, on note $\Delta(f)$ et $T(f)$ les fonctions réelles définies par :

$\forall x \in \mathbb{R}, \Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x)$ et $T(f)(x) = f(x+1)$.

On admettra (aisément !) que Δ et T sont des endomorphismes de $\mathcal{F}$.

On note $\Delta^0 = T^0 = Id_{\mathcal{F}}$ (donc si $f \in \mathcal{F}$, $\Delta^0(f) = T^0(f) = f$), et, si $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 1$,

$\Delta^j = \Delta^{j-1} \circ \Delta = \Delta \circ \Delta^{j-1}$, $T^j = T^{j-1} \circ T = T \circ T^{j-1}$.

1.a.i Soit $P \in E$, non constant. $\Delta(P)$ est une fonction polynôme.
Comparer les degrés de $\Delta(P)$ et de P.
Calculer le coefficient dominant de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P.

1.a.ii Vérifier que Δ induit un endomorphisme de E_n, noté Δ_n.

1.b.i Déterminer $\ker \Delta_n$.

1.b.ii En déduire le rang de Δ_n. Déterminer $\mathrm{Im}\, \Delta_n$.

2. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions polynômes N_k par :

$\forall x \in \mathbb{R}, N_0(x) = 1$ et $N_k(x) = \dfrac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}$.

2.a.i Pour $k \geq 1$, exprimer $\Delta(N_k)$ en fonction des polynômes $(N_j)_{j \geq 0}$.

2.a.ii Calculer, pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\Delta^j(N_k)$ puis $(\Delta^j(N_k))(0)$.

2.b.i Montrer que la famille $(N_0, N_1, \ldots, N_n)$ est une base de E_n.

2.b.ii Soit $P \in E_n$, P s'écrit $P = a_0 N_0 + a_1 N_1 + \ldots + a_n N_n$ où $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
Exprimer les a_j en fonction des $(\Delta^j(P))(0)$.

3.a Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{F}$. Déterminer pour $x \in \mathbb{R}$, $(T^k(f))(x)$.

3.b Soit $j \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{F}$.

3.b.i Expliciter $\Delta^j(f)$ en fonction des $T^k(f)$, $0 \leq k \leq j$.
(on pourra remarquer que $\Delta = T - Id_{\mathcal{F}}$).

3.b.ii En déduire que $(\Delta^j(f))(0)$ ne dépend que des valeurs de f aux points $0,1,\ldots,j$: $f(0), f(1), \ldots, f(j)$.

Partie II

On se donne une fonction f de $\mathcal{F}$. On cherche les polynômes solutions du problème $(\mathcal{P})$ suivant :

$$(\mathcal{P}): \begin{cases} d^\circ P \leq n \\ \forall k \in \{0,1,\ldots,n\}, P(k) = f(k) \end{cases}$$

On pose $N(x) = \prod_{j=0}^{n} (x-j) = x(x-1)\ldots(x-n)$.

1.a Soit l'application linéaire :

$\varphi : E_n \to \mathbb{R}^{n+1}$

$P \mapsto (P(0), \ldots, P(n))$

Montrer que φ est un isomorphisme.

1.b En déduire que le problème $(\mathcal{P})$ possède une unique solution notée P_f.

2.a Pour $j \in \{0,1,\ldots,n\}$, comparer $(\Delta^j(f))(0)$ et $(\Delta^j(P_f))(0)$.

2.b En déduire l'expression de P_f en fonction des $(\Delta^j(f))(0)$ et des polynômes N_j.

3. Dans cette question, on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

On note $M_n = \sup\left\{\left|f^{(n+1)}(t)\right|, t \in [0,n]\right\}$.

3.a Soit $x \in [0,n]$, non entier.

Montrer que : $\exists c \in]0,n[/ f(x) - P_f(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} N(x)$.

(On pourra poser $\varphi(t) = f(t) - P_f(t) - KN(t)$, où K est tel que $\varphi(x) = 0$ et appliquer judicieusement le théorème de Rolle.)

3.b En déduire que $\forall x \in [0,n], \left|f(x) - P_f(x)\right| \leq \dfrac{1}{n+1} M_n$

(On pourra majorer $\left|N(x)\right|$ sur chaque intervalle $[j, j+1]$, où $j \in \{0,1,\ldots,n-1\}$.